

$$\vec{\nabla}_x \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \text{Induktions Gesetz}$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad \text{Ampere Gesetz}$$

$$\vec{\nabla}_x D = 4\pi \rho \quad \text{Ladungsverschiebung}$$

$$\vec{\nabla}_x \vec{B} = 0 \quad \text{Nicht Vorhandensein eines Magnetmonopols}$$

Die Maxwell Gleichungen in eq. 1 sind im Gauß'schen System dargestellt. Wird die 2. Gleichung mit der zeitlichen Ableitung der 3. Gleichung kombiniert, so läßt sich die Kontinuitätsgleichung für die elektrischen Ladungs-

und Stromdichten ρ und σ angeben. Die elektrischen und magnetischen Feldstärken E und B lassen sich durch das Vektorpotential A und das skalare Potential ϕ ausdrücken. Das Vektorpotential bestimmt einen senkrecht zur Ebene der Zirkulation (Rotor) stehenden Vektor A, so daß sich aus dem Rotor dieses vektors wieder der Vektor der ursprünglichen Ebene entwickeln läßt sowie ein Gradientenfeld des skalaren Potentials Φ .

$$\vec{\nabla} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{eq. 2}$$

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \text{grad } \phi \quad \text{eq. 3}$$

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}_x \vec{A} \quad \text{eq. 4}$$

Jetzt können wir schreiben (eq.4) Damit sind die 1. und die 3. Gleichung des Systems eq.1 erfüllt. Jedoch sind die Potentiale A und ϕ nicht eindeutig, weil man dieselben Felder auch mit neuen Potentiale eines "gestrichenen" Systems erhält. Wir erhalten für A und ϕ im gestrichenen System eq. 5.

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}' X$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial X}{\partial t}$$

Das X ist eine willkürliche Funktion des Ortes r und der Zeit t. Diese Änderung der Potentiale, die jedoch KEINE Änderung der Feldgrößen E und B bedingt heißt: **Eichtransformation**.

eq. 5

Aus der Quantenmechanik wissen wir, daß bei schwacher Kopplung des $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ Impulses die Wellenfunktion bei einer Umeichung von eq. 4 ergibt.

$$\Psi' = \Psi e^{\frac{ie}{\hbar c} X} \quad \text{Die Form der Wellengleichung bleibt erhalten (Schrödinger Gleichung)}$$

eq. 6

Solche Trafos werden Eichtrafos erster Art genannt. Die trafos gemäß eq. 4 werden Eichtrafos zweiter Art genannt.

Setzt man eq. 3 in die zweite und dritte Maxwell Gleichung (eq.1) ein, so folgt:

$$\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} + \frac{1}{c} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

Falls as Vektorpotential A in orthogonalen Koordinaten geschrieben wird gilt: $\vec{\nabla}_x \vec{\nabla}_x \vec{A} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

eq. 8

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi = -4\pi \rho$$

eq. 7

Der rechte Term stellt einen Vektor, dessen einzelkomponenten Nabla A_i sind. Auch kann man sagen: der Laplace operator wurde auf die Komponenten A_i angewandt.

Wird Gleichung 8 in 7 eingesetzt, so lassen sich die entstandenen Gleichungen vereinfachen, wenn eine Eichtrafo (eq.4) zu den neuen gestrichenen Potentialen durchgeführt wird. Diese ist so zu bestimmen, daß diese die Lorentzbedingung erfüllen. Die Eichfunktion X kann aus der Gleichung eq. 10 bestimmt werden.

$$\vec{\nabla} \vec{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi'}{\partial t} = 0$$

eq. 9

$$\vec{\nabla} X - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} X = - \left(\vec{\nabla} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

eq. 10

Mit dieser Eichtrafo wird das System der eq. 7 zum System eq. 11 übergeführt: geeicht.

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}' - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \vec{A}'}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c} \vec{j}$$

$$\vec{\nabla}^2 \phi' - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi'}{\partial t^2} = -4\pi \rho$$

eq. 11

Befinden wir uns im vollständig leerem Raum, läßt sich auch eine Eichtrafo finden:

$$\vec{\nabla} \vec{A}'(\vec{r}, t) = 0$$

$$\phi'(\vec{r}, t) = 0$$

eq. 12

Diese besagt für alle r und t gilt daß die Eichtrafos 0 werden. Im vollständig leerem Raum gilt, daß die elektrischen Ladungen und Stromdichten ρ und j ebenfalls 0 sind. **Das System der eq.12 heißt Coulomb Eichung.** Mittels der Coulomb Eichung können transversale ebene Wellen als Lösungen für A' und damit auch für e und B gefunden werden.

Jetzt lass ich die Striche weg, die sind ab jetzt wirklich unnötig.

Eq. 9 und 11 werden zum folgenden System hin transformiert:

$$\text{Nabla}^2 \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{\nabla} \vec{A} = 0$$

$$\phi = 0$$

eq. 13

Eine ebene Welle als Lösung dieser Gleichung (eq.13) ist durch ein reelles vektorpotential A mit dem Wellenzahlvektor k sowie dem reellen Polarisationsvektor ε gegeben. Das stellt das Gleichungssystem eq. 14 dar.

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = 2 \vec{\epsilon} |\vec{A}_0| \cos(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$= \vec{A}_0 e^{i(\vec{k} \text{vecr} - \omega t)} + \vec{A}_0^* e^{-i(\vec{k} \text{vecr} - \omega t)}$$

eq. 14

Darin enthalten sind konjugiert komplexe Terme. Mit w = kc = abs(k) c wird die erste Gleichung von eq. 13 erfüllt, wenn der Polarisationsvektor A0 transversal ist. Transversal heißt, er steht senkrecht auf k. Die dazu gehörenden elektrischen und magnetischen Felder können jetzt bestimmt werden zu:

$$\vec{E} = -2 \vec{k} \vec{\epsilon} \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$\vec{B} = -2 \vec{k} \times \vec{\epsilon} \sin(\vec{k} \vec{r} - \omega t + \alpha) \quad \vec{S} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \times \vec{H}$$

eq. 15

Der Ausbreitungsvektor oder Poyntingvektor wird:

eq. 16

Im übrigen gilt: B = μH Im ladungs- und stromfreie Raum ist H identisch mit B.

Es wird über eine Periode gemittelt und es ergibt sich dann:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{gemittelte Periode}$$

$$\vec{S} = \frac{\omega^2}{2\pi c} \vec{\epsilon}^2$$

Die Dielektrizität wird verstanden als Produkt derjenigen des freien Raumes mit der einer materie. Die Größe von S charakterisiert die Wellenintensität.

eq. 17

Bis hierher habe ich aufgezeigt, wie und warum sich eine Welle im freien Raum fortpflanzt. Es ist doch irgendwie erstaunlich, denn rein von der Vorstellung vermag es mir nicht einzuleuchten, warum dieses so ist. Wenn aber die Eichtrafo durchgeführt wird, dann wird das Szenario deutlicher. Verständlich jedoch wird es erst durch die Applizierung des Impulses mit Hilfe der minimalen Kopplung. Damit erst ließ sich die Wellenfunktion schreiben.

Jetzt kann natürlich die Quantenmechanik in formvollendeter Schönheit eingreifen. Wir quantisieren das freie elektromagnetische Feld. Basis sind die MWG (eq.1) sowie die Culomb Eichung. Daraus Ermittlung der Wellengleichung für das Vektorpotential. Dann kommt der Quantenübergang:

Die Felder werden durch einen Satz mit diskreten Variablen beschrieben und wir schränken den Raum ein, indem wir einen Würfel der Kantenlänge L aufbauen. Das Vektorpotential nimmt damit folgende gestalt an:

$$\vec{A}(L, y, z, t) = \vec{A}_0(0, y, z, t)$$

$$\vec{A}(x, L, z, t) = \vec{A}_0(x, 0, z, t)$$

$$\vec{A}(x, y, L, t) = \vec{A}_0(x, y, 0, t)$$

Was sind die randbedingungen des Feldes auf den Kanten des Würfels?
 Ein guter Ansatz ist, die Periodizität auf den Wänden zu fordern.
 Damit werden die Normalmoden so bestimmt, daß stets volle Wellenlängen in diesen Würfel passen, was mathematisch der Anschrift im System eq.18 entspricht.

eq. 18

$$\vec{A}(x, y, z, t) = \vec{A}(x, y, z) e^{i\omega t}$$

$$\left(\Delta + \frac{\omega}{c^2}\right) \vec{A}(x, y, z) = 0$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

Mit der ersten Gleichung des Systems eq.19 als Ansatz folgt aus der Wellengleichung für das Vektorpotential die zweite Gleichung von eq.19.

eq. 19

Und hier hör ich einfach mal mittendrin auf. Es wird jetzt echt wüst. Jetzt müssen über diese wellenvereinheitlichung mit Hilfe der Fourierreihen die Vektorpotential A berechnet werden. Das ergibt Doppelsummen. Dann muß der konjugiert komplese Anteil (siehe oben) berücksichtigt werden. ergibt dann exponentialfunktionen, die Räume spalten sich zwangsläufig in Unter- oder teilräume auf und unter Berücksichtigung der klassischen elektrodynamik können dann wieder Feldgleichungen aufgestellt werden. Hat man diese Mühen hinter sich, dann steht ein wiederum erstaunliches ergebnis da:

Die Energie H des elektromagnetischen Feldes wird genau gleich einer Summe von Energien gebildet aus harmonischen Feldoszillatoren aussehen Die normierten Normalmoden des EM Feldes schwingen damit wie die klassischen Oszillatoren. Ferner wird mit Hilfe der Hamiltonfunktion erkannt, wie das Strahlungsfeld aussieht. Darin wiederum verbirgt sich etwas, was wir

Nullpunktsenergie nennen.. Diese ist offensichtlich unendlich, denn wir entdecken eine unendliche Zahl von Feldoszillatoren.

Taucht man dann noch tiefer ein, so wird erkannt werden, daß dieser unendlich große Summand bei den meisten physikalischen Problemen wegfällt. Aber ganz bestimmte Fragen machen die Betrachtung dieser ominösen Nullpunktsenergie notwendig, z.B. Die Änderung der Nullpunktsenergie bei Volumenänderung des physikalischen Systems oder bei Änderung der Randwertbedingungen. Letzteres führt zum Casimir Effekt. Zu erwähnen sind dann die kohärenten Zustände des Strahlungsfelds. Das kann nachgelesen werden unter dem Begriff der "Glauber-Vektoren". Glauber führte einen Feldzustand ein, indem das E-Feld dem klassischen E-Feld ähnelt. Er erlaubte eine Ungenauigkeit in der Photonenzahl, um damit die Phase des Feldes genauer zu bestimmen. Er konnte eine Wahrscheinlichkeit nennen die Wahrscheinlichkeit vom n Photonen im Glauberzustand.

So jetzt meine ich mal sei der theoretischen Physik genügend geföhnt. Sonst müßte ich ja noch eine Forums Vorlesung über relativistische Quantenmechanik abhalten.

Einen ganz netten Gruß von

Wilfried