9 Integration von Funktionen in mehreren Variablen

Der Integralbegriff für Funktionen in mehreren Variablen ist wesentlich vielfältiger als der bei Funktionen in einer Variablen. Dem unbestimmten Integral bei einer Variablen entspricht im mehrdimensionalen Fall die Integration eines Vektorfeldes, an die Stelle von bestimmten (eigentlichen oder uneigentlichen) Integralen treten Bereichsintegrale, Kurvenintegrale und Oberflächenintegrale.

(i) Integration von Vektorfeldern

Eine Funktion $f(x_1,x_2,x_3)$, welche jedem Vektor $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ einen Skalar in $\mathbb{R}$ zuordnet, bezeichnet man auch als **Skalarfeld**.

Eine vektorwertige Funktion

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{f}(x_1,x_2,x_3) = (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3), f_3(x_1,x_2,x_3)),$$

die jedem Vektor einen Vektor zuordnet, nennt man auch **Vektorfeld**.

Bei der Bildung des Gradienten – vergleichbar mit der ersten Ableitung für Funktionen in einer Variablen – wird einem Skalarfeld ein Vektorfeld zugeordnet:

$$F(x_1,x_2,x_3) \mapsto \text{grad } F = (\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \partial F/\partial x_3).$$

Gibt es umgekehrt zu jedem Vektorfeld $\vec{f} = (f_1,f_2,f_3)$ eine Funktion F mit grad F = $\vec{f}$? Man nennt $\vec{f}$ in einem solchen Fall ein **Gradientenfeld** (auch: **Potentialfeld** oder **konservatives Vektorfeld**) und F eine **Stammfunktion** (oder Potential oder unbestimmtes Integral) von $\vec{f}$.

Die Antwort auf obige Frage fällt jedoch im Allgemeinen negativ aus. Genauer gesagt gilt: Ein Vektorfeld $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{f}(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n),...,f_n(x_1,...,x_n))$ besitzt (unter bestimmten Voraussetzungen) genau dann eine Stammfunktion F mit grad F = $\vec{f}$, wenn die Bedingung

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \text{für alle } i, j = 1,..., n,\ i \neq j$$

(d.i. die sogenannte Integrabilitätsbedingung) erfüllt ist.

<u>Beispiele</u>:

- Für die Berechnung einer Stammfunktion zu

$$\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 + 4xy - 3y^2 \\ 2x^2 - 6xy - 3y^2 \end{pmatrix}$$

überprüfen wir zunächst die Integrabilitätsbedingung $\partial f_1/\partial y = 4x - 6y = \partial f_2/\partial x$, also existiert eine Stammfunktion F(x,y) mit $F_x = f_1$ und $F_y = f_2$. Zunächst ist

$$F_x = f_1 \Rightarrow F = \int f_1(x,y)\, dx = x^3 + 2x^2y - 3xy^2 + c(y),$$

wobei c(y) eine beliebige Funktion in y ist (welche ja bei der partiellen Ableitung nach x verschwindet). Zur Bestimmung von c(y) fahren wir fort gemäß

$$F_y = f_2 \;\Rightarrow\; 2x^2 - 6xy + c'(y) = 2x^2 - 6xy - 3y^2$$
$$\Rightarrow\; c'(y) = -3y^2 \;\Rightarrow\; c(y) = -y^3 + C,$$

also ist $F(x,y) = x^3 + 2x^2y - 3xy^2 - y^3 + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.

- Das Vektorfeld $\vec{f}(x,y,z) = (2x,0,-1)$ ist ebenfalls ein Gradientenfeld, denn alle gemischten partiellen Ableitungen sind gleich (nämlich alle =0), und somit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Die zugehörende Stammfunktion lautet $F(x,y,z) = x^2 - z + C$, $C \in \mathbb{R}$, wie man aus $F_x = 2x$, $F_y = 0$ und $F_z = -1$ sofort erkennt.
- Eine punktförmige Ladung Q im Koordinatenursprung erzeugt ein elektrisches Feld

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Wie lautet das Potential $\varphi(x,y,z) = -F(x,y,z)$ (d.h. $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi$)?

Wir prüfen zuerst die Integrabilitätsbedingung für $\vec{E} = (E_1,E_2,E_3)$ und finden

$$\frac{\partial E_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-3xy}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = \frac{\partial E_2}{\partial x}$$

und genauso $\partial E_1/\partial z = \partial E_3/\partial x$, $\partial E_2/\partial z = \partial E_3/\partial y$. Die gesuchte Stammfunktion F erhält man nun durch Integration von E_1 nach x, also

$$F(x,y,z) = \int E_1(x,y,z)dx = \int \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{-1}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + c_1(y,z),$$

wo $c_1(y,z)$ eine unbekannte Funktion in y und z ist. Aus $\partial F/\partial y = E_2$ folgt dann $\partial c_1(y,z)/\partial y = 0$, also $c_1(y,z) = c_2(z)$, und mit $\partial F/\partial z = E_3$ erhält man schließlich $c_3(z) = C$ konstant. Folglich ist das gesuchte Potential gegeben durch

$$\varphi(x,y,z) = -F(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(ii) Doppel- und Dreifachintegrale

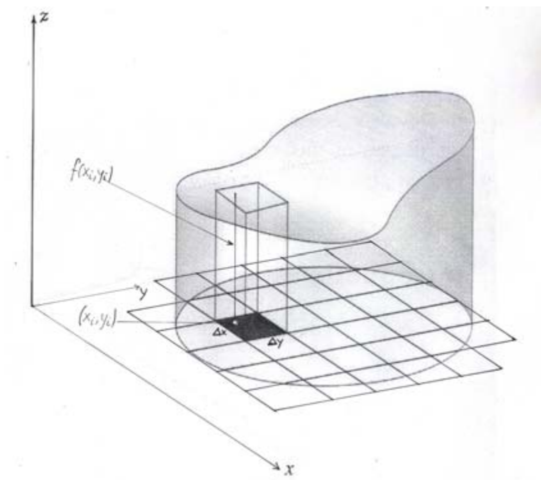
Gegeben ist eine Funktion f: $D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und ein Bereich $B \subseteq D$. Wir denken uns den Bereich B auf kariertem Papier gezeichnet. Jedes Kästchen hat die Länge Δx und die Breite Δy. Ist (x_i, y_i) irgend ein Punkt aus dem i-ten Kästchen, so ist

$$f(x_i, y_i)\Delta x \Delta y$$

das Volumen des darüber stehenden Quaders und

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x\,\Delta y$$

ist annähernd das Volumen des neben stehenden Körpers.



Macht man nun die Kästchen immer kleiner ($\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$), so erhält man immer bessere Näherungswerte. Schließlich existiert (unter bestimmten Voraussetzungen) der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta x\,\Delta y$$

den man mit

$$\iint_B f(x,y)\,dxdy$$

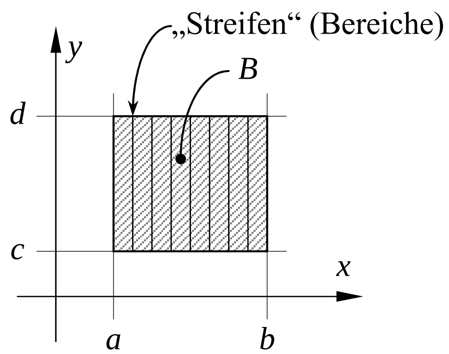
bezeichnet (Doppelintegral oder Bereichsintegral oder 2-dimensionales Integral über dem Bereich B).

Wie berechnet man nun $\iint_B$?

- $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$

  Dann gilt: $\iint_B f(x,y)\,dxdy =$

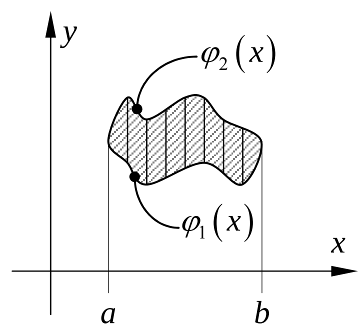
  $$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx \right) dy$$



- Wenn der Bereich kein Rechtecksbereich ist:

  $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}$

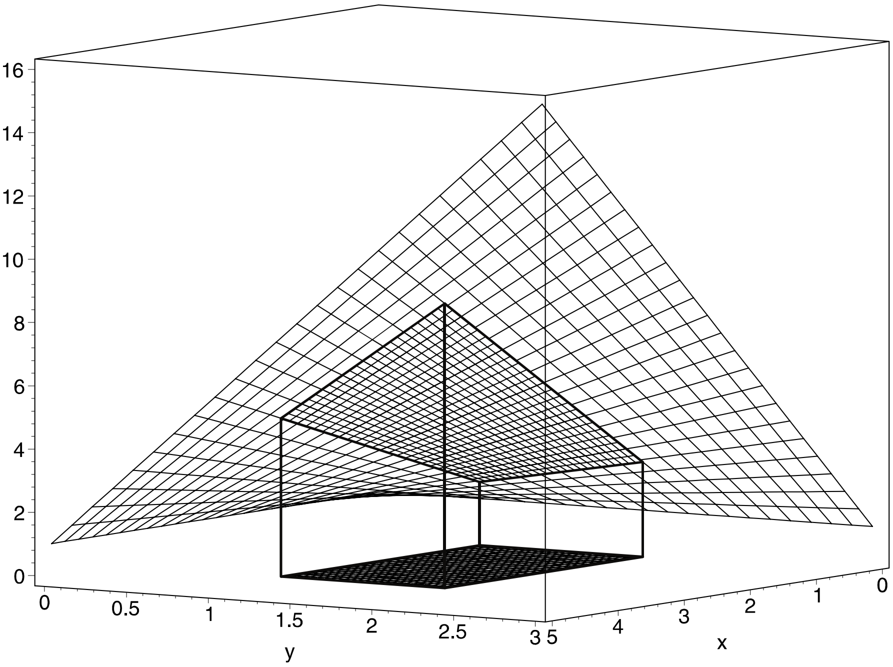
  $$\iint_B f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



Beispiele:

- $\iint_B 1 \cdot dxdy = |B|$ ist die Fläche von *B*.

- $\iint_B (1+xy)\,dxdy$ mit $B: 1 \le x \le 4, 1 \le y \le 2$:

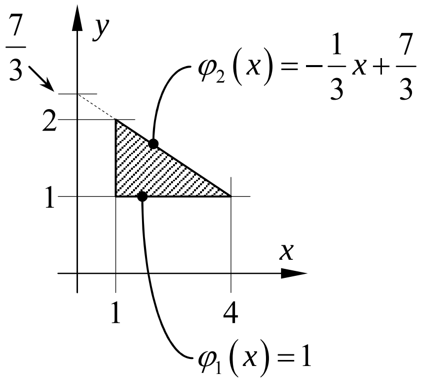


$$\iint_B (1+xy)\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_1^2 (1+xy)\,dy \right) dx = \int_1^4 \left(y + \frac{xy^2}{2} \right)\Bigg|_{y=1}^{2} dx = \int_1^4 \left(1 + \frac{x}{2} \cdot 3 \right) dx =$$

$$= \left(x + \frac{3x^2}{4} \right)\Bigg|_{x=1}^{4} = 3 + \frac{3 \cdot 15}{4} = \frac{57}{4} = \underline{14\frac{1}{4}}$$

Das ist das Volumen über dem Rechtecksbereich, der nach oben mit der Fläche begrenzt ist.

- $f(x, y)$ siehe obiges Beispiel. Wir wollen jetzt statt einer rechteckigen Grundfläche (*B*) eine dreieckige verwenden (Ermittlung der Funktionen φ_1 und φ_2 siehe Graphik rechts).



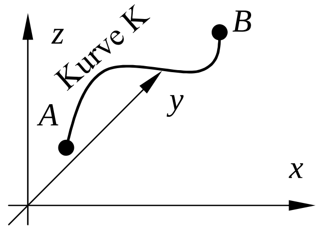
$$\iint_B (1+xy)\,dxdy = \int_1^4 \left(\int_1^{\frac{7-x}{3}} (1+xy)\,dy \right) dx =$$

$$\int_1^4 \left(y + \frac{xy^2}{2} \right)\Bigg|_{y=1}^{\frac{7-x}{3}} dx = \int_1^4 \left(\frac{7-x}{3} - 1 + \frac{x}{2}\left(\left(\frac{7-x}{3} \right)^2 \right) \right) dx = \ldots$$

$$= \underline{5\frac{3}{8}}$$

Auf analoge Weise kann man auch Dreifachintegrale (allgemein: Mehrfachintegrale) definieren.

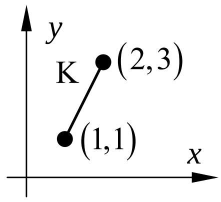
(iii) Kurvenintegrale



Beispiel: Arbeit = Kraft * Weg. Wie berechnet man jedoch die Arbeit, wenn sich die Kraft ständig ändert; konkreter: beispielsweise längs einer Raumkurve ?

Vektorfeld $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$. $\int_K \vec{f}\left(\vec{x}\right) d\vec{x} = \int_K \left(f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \right)$

Die Kurve muss durch einen einzigen Parameter dargestellt werden können. Dann erfolgt die Berechnung durch Rückführung auf ein gewöhnliches bestimmtes Integral mittels Parameterdarstellung von *K*.



Beispiel:

Gegeben ist ein Vektorfeld $\vec{f}\left(\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y^2 \end{pmatrix}$

und die Strecke *K* von $(1,1)$ nach $(2,3)$:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+2t \end{pmatrix} 0 \le t \le 1$$

$$\int_K \vec{f} d\vec{x} = \int_K x dx + y^2 dy = \int_0^1 x(t) \frac{dx}{dt} dt + y^2(t) \frac{dy}{dt} dt = \int_0^1 (1+t) \cdot 1 \cdot dt + (1+2t)^2 \cdot 2 \cdot dt =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{\left(1+t+2+8t+8t^2\right)}_{=8t^2+9t+3} dt = \left.\frac{8}{3}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 3t\right|_0^1 = \frac{8}{3} + \frac{9}{2} + 3 = \underline{10\frac{1}{6}}$$

Führen Sie die selbe Rechnung für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 - t + 1 \end{pmatrix}$, $1 \le t \le 2$, durch!

(Zeigen Sie zuvor, dass diese Kurve auch durch die beiden Punkte (1;1) und (2;3) geht!)

Der Wert des Kurvenintegrals ist also von der speziellen Wahl der Kurve nicht abhängig, sondern nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve. Dies gilt allerdings nur, wenn das Vektorfeld ein Potentialfeld ist.

Beispiel: Gegeben sind das Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y \end{pmatrix}$ sowie die Kurven K_1 und K_2:

K_1: $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$, $0 \le t \le 2$

(Begründen Sie, dass K_1 ein Parabelstück zwischen den Punkten (0;1) und (2;5) ist!)

K_2 ist die Verbindungsgerade zwischen den Punkten (0;1) und (2;5).

a) Berechnen Sie: $\int\limits_{K_1} \vec{f}\, d\vec{x}$ und $\int\limits_{K_2} \vec{f}\, d\vec{x}$

b) Zeigen Sie, dass $\vec{f}$ ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie die Potentialfunktionen!

c) Es sei P eine solche Potentialfunktion. Berechnen Sie P(2;5) – P(1;1) und vergleichen Sie mit dem Ergebnis von Aufgabe a)!

d) Rechnen Sie Aufgabe a) auch für das Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ x \end{pmatrix}$! Erklärung?